

文章编号: 1004-7220(2022)01-0155-07

血管内壁的脂滴形貌理论模型研究

郑彦杰, 宋泽宇, 于洋

(北京理工大学 宇航学院, 力学系, 北京 100081)

摘要:目的 建立可描述血管内脂滴整体形貌的理论模型,为脂肪栓塞患者血管内壁脂滴整体形貌的研究与分析提供基础理论模型。方法 建立液滴在圆柱管内壁的变半径模型理论描述脂滴在血管内壁的形貌,并利用 Surface Evolver(SE)软件的仿真结果验证理论模型准确性。根据理论模型,分析脂滴体积和接触角对脂滴在血管内无量纲黏附面积 S_{b_0} 和阻塞比 κ 的影响规律。结果 通过理论模型预测脂滴在血管内壁黏附形貌的轮廓参数,包括脂滴在方位角为 0 和 $\pi/2$ 时的圆弧半径和高度,与 SE 模拟所得对应参数的相对误差小于 10%。具有相同无量纲体积 V_0 的脂滴,在血管内壁 S_{b_0} 随着接触角的增加而减小, κ 随着接触角的增加而增大。相同接触角条件下, V_0 越小的脂滴, S_{b_0} 和 κ 越小。结论 所建立的变半径理论模型能很好描述脂滴在圆柱血管内壁的形貌特征,通过理论模型可准确、快速得到体积、接触角等参数对脂滴高度、黏附面积以及横截面积等形貌参数的影响规律,表明脂滴的接触角越大或无量纲体积越小,导致栓塞的概率越低。研究结果为相关疾病分析提供理论支撑。

关键词:脂肪栓塞; 血管内壁; 脂滴形貌; 接触角

中图分类号: R 318.01 文献标志码: A

DOI: 10.16156/j.1004-7220.2022.01.024

Theoretical Model Study on Morphology of Lipid Droplet on Inner Vascular Wall

ZHENG Yanjie, SONG Zeyu, YU Yang

(Department of Mechanics, School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: **Objective** To establish the theoretical model for morphology of lipid droplets adhering to inner vascular wall, so as to provide the theoretical model for the study and analysis of the overall morphology of lipid droplets on inner vascular wall of patients with fat embolism. **Methods** The model of the droplet with variable radius on inner wall of the cylindrical tube was established to describe morphology of lipid droplets on inner vascular wall, and accuracy of the theoretical model was verified by Surface Evolver (SE) software simulation results. According to the theoretical model, the influencing patterns of lipid droplet volume and contact angle on dimensionless adhesion area S_{b_0} and blockage ratio κ of lipid droplets in blood vessels were analyzed. **Results** The theoretical model could predict contour parameters of adhesion morphology for lipid droplets on inner vascular wall, including the height and arc radius of lipid droplet at azimuth angle of 0 and $\pi/2$. The relative errors between contour parameters obtained from the theoretical model and corresponding parameters obtained from the SE simulation were smaller than 10%. For lipid droplets with the same dimensionless volume V_0 , S_{b_0} of inner vascular wall

收稿日期: 2021-04-08; 修回日期: 2021-05-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(11772052, 11632009)

通信作者: 于洋, 副教授, E-mail: yuyang08@bit.edu.cn

decreased with contact angle increasing, and blockage ratio κ increased with contact angle increasing. At the same contact angle, the smaller V_0 , the smaller S_{b_0} and κ would be. **Conclusions** The established theoretical model with variable radius can well describe morphological characteristics of lipid droplets on inner vascular wall. The influencing pattern of volume, contact angle and other parameters on height, adhesion area and cross-sectional area of lipid droplets can be accurately and quickly obtained through the theoretical model, indicating that the larger the contact angle of lipid droplets or the smaller the dimensionless volume, the lower the probability of embolism. The research findings provide theoretical support for the analysis on related diseases.

Key words: fat embolism; inner vascular wall; lipid droplet morphology; contact angle

血管作为人体内承载血液的重要器官,是整个血液循环系统中的运输通道。血液成分异常导致的血液与血管产生异常相互作用会引发心血管疾病^[1]。例如:患者骨折后,骨髓腔内的脂肪微粒会进入伤口处破裂的静脉内,容易引起脂肪栓塞^[2]。严重的脂肪组织挫伤或者脂肪肝挤压伤时,也会导致脂滴进入血流而引起脂肪栓塞^[3]。脂肪栓塞患者血液中有较多的脂滴由于无法被及时分解和吞噬而黏附在血管内壁,含量过多容易引发中毒性或化学性血管炎^[4-5]。目前已有学者对单个固体微粒在血管内的运动状态进行分析,但有关脂滴在血液中的形貌研究还鲜有报道^[6]。有限元软件模拟计算是目前解决血管内力学问题最常用的方式^[7-8]。冯元桢^[9]研究认为,当血液在管道中流动时,红细胞等悬浊物具有向管道中心移动的趋势,留下边缘的血浆层;血管内的血液可以假设为定常层流,则接近血管壁附近的血液流速较慢。忽略剪切力对脂滴外观轮廓形貌的影响,可利用“血浆-脂滴-血管壁”三相接触模型研究脂滴在血管壁上的黏附形貌。关于三相接触状态的液滴形貌研究表明,理论上液滴形貌在稳定的条件下满足 Young-Laplace 微分方程^[10];但方程的解析解仅局限于几种特殊情况,大部分情况下无解析解,故研究者采用各种近似方法来简单、高效和较为精确地解决问题^[11]。对于平面上的液滴,在无重力和有重力条件下分别用球缺模型^[12]和半椭球模型^[13]进行描述。而液滴在不同曲面上,例如球面^[14]、柱面外侧^[15-16],也都同样有相关的理论模型研究。

本文建立了适用圆管内液滴形貌的理论模型,并以 Surface Evolver(SE)仿真结果校验该模型的准确性。结果表明,应用该模型可以快速预测出黏附在圆管内壁液滴的形貌参数,为预测脂肪栓塞患者

体内血管内壁的脂滴形貌提供理论基础。

1 理论模型

对于一个处于固-液-气三相接触状态下的平衡液滴,其轮廓需要满足 Young-Laplace 微分方程:

$$\Delta p = 2H_{\text{mean}}\gamma \quad (1)$$

式中: Δp 为液滴表面内外压力差; H_{mean} 为液-气界面的平均曲率; γ 为液-气界面能。

如图 1 所示,以液-气界面中心点为坐标原点,液滴轮廓在该点的法线方向为 z 轴正向,绕 z 轴逆时针旋转的角度为方位角 θ 的正向,圆柱的轴线方向为方位角 $\theta=0$ 的 r 轴,可以得到圆柱坐标系 (r, θ, z) 。

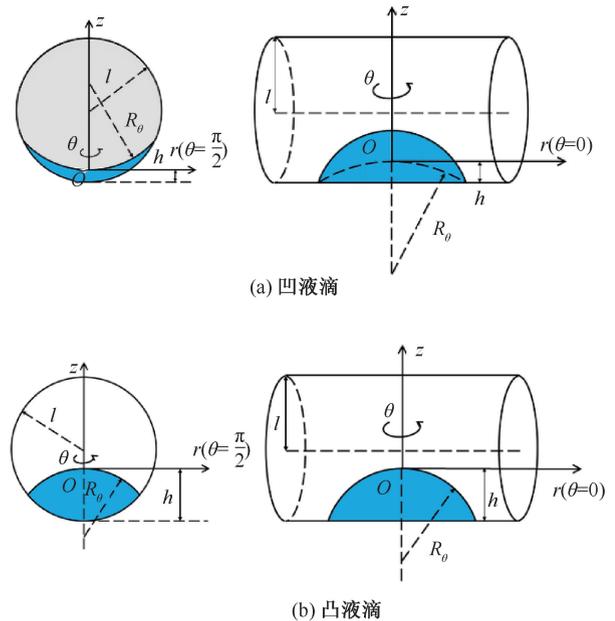


图 1 不同液滴在圆柱内壁形貌示意图以及坐标系建立方式
Fig.1 Schematic diagram for the morphology of different droplets on inner wall of the cylinder and method of establishing the coordinate system (a) Concave droplets, (b) Convex droplets

本文在变半径模型^[15]基础上建立能够描述管内液滴形貌的理论模型。首先,假设在忽略重力和流动剪切力的影响下,用过 z 轴的平面截取液滴轮廓面所得到的曲线都是圆弧线,由此可将液滴的轮廓方程表示为:

$$r^2 + (z + R_\theta)^2 = R_\theta^2 \quad (2)$$

式中: R_θ 为方位角为 θ 时的圆弧半径,向上弯曲时 R_θ 为负值,向下弯曲时 R_θ 为正值。液滴轮廓面上的中心点外法线方向沿着 z 轴正方向,所有的旋转截面交于 z 轴,根据 Euler 公式^[17]得到任意方位角下截面的法曲率:

$$1/R_\theta = k_\theta = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \quad (3)$$

式中: k_1 和 k_2 为轮廓中心点的主曲率。 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/2$ 的方向是正交主方向,主曲率可以表示为:

$$k_1 = 1/R_0 \quad (4)$$

$$k_2 = 1/R_{\pi/2} \quad (5)$$

式中: R_0 和 $R_{\pi/2}$ 分别为方位角为 0 和 $\pi/2$ 时圆弧半径。在柱坐标系下,圆柱面的方程表示为:

$$(r \sin\theta)^2 + (l - z - h)^2 = l^2 \quad (6)$$

式中: h 为液滴中心点到圆柱最低点的距离; l 为圆柱的半径。通过联立液滴的轮廓方程和圆柱面的方程可以得到液滴与圆柱面的接触线的表达式,其中三相接触线上任意点的坐标为 (r_i, z_i, θ_i) ,三相接触线表示为:

$$\frac{R_{\theta_i}}{\sqrt{R_{\theta_i}^2 - r_i^2}} \sqrt{R_{\theta_i}^2 - r_i^2} - R_{\theta_i} = -\sqrt{l^2 - (r_i \sin\theta_i)^2} - h + l \quad (7)$$

或者:

$$(l - h - z_i)^2 - l^2 = (z_i^2 + 2z_i R_{\theta_i}) \sin^2\theta_i \quad (8)$$

液滴的体积表达式需要由 R_θ 和 z_i 的关系分类讨论。当 $|R_\theta| > -z_i$ 时,液滴的体积可以表示为:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_i} \left(\frac{R_\theta}{\sqrt{R_\theta^2 - r^2}} \sqrt{R_\theta^2 - r^2} - R_\theta + \sqrt{l^2 - (r \sin\theta)^2} + h - l \right) r dr d\theta \quad (9)$$

如果存在1个方位角 θ 下的轮廓半径 $|R_\theta| < -z_i$,极半径 r 的积分范围需要被分为两个部分, $[0, r_i]$ 和 $[r_i, R_\theta]$ 。

在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/2$ 方向,局部接触角为 Young 接触角 φ_0 ,得到几何关系:

$$R_0(1 - \cos\phi_0) = h \quad (10)$$

$$\cos\phi_0 = \frac{-R_{\pi/2}^2 - l^2 + (l - h + R_{\pi/2})^2}{2R_{\pi/2}l} \quad (11)$$

通过给定的接触角 ϕ_0 、液体体积 V 、圆柱半径 l ,解方程(9)~(11)可以得到液滴的轮廓参数 $R_{\pi/2}$ 、 R_0 、 h 。由此便可得到描述液滴在圆柱内壁上平衡状态下外观轮廓的近似理论曲面。

2 数值模拟

Surface Evolver(SE)软件以在满足边界条件下总能量取最小时的几何构型是其自然实际构型的理论为基础,能够模拟固体、液体、气体组成的各种稳定形态^[18]。研究表明,SE 软件可以模拟静态或准静态的润湿现象,并且 SE 模拟结果与对应表面润湿行为的实验结果相吻合^[19-20]。因此,可以认为 SE 模拟结果与相同条件下的实验观测结果一致。

通常在小液滴的情况下,重力对液滴外观形貌的影响很小,可以忽略重力对液滴的影响。本文利用 SE 软件模拟无重力条件下液滴在圆柱管内壁的形貌。设定圆柱半径 l ,设置液滴的初始形状为正方体,且正方体下表面被限制在圆柱体的内壁表面上,在设置液滴的体积和接触角后,对液滴和圆柱体的表面进行网格划分,总共划分 20 480 个面。设置当总自由能的误差收敛在 10^{-7} 单位的可接受公差范围内时完成计算。

3 结果

3.1 圆弧假设验证

利用 SE 软件模拟得到体积 $V = 10 \mu\text{L}$ 、圆柱半径 $l = 3.4 \text{ mm}$ 、Young 接触角(φ_0)分别为 30° 和 60° 的平衡液气界面形貌。以圆柱轴线的正向为方位角 0° 的方向,图 2 展示了不同方位角下接触角为 30° 凹液滴和接触角为 60° 凸液滴在圆柱内壁的剖面轮廓图。将所得不同方位角位置的液滴外观轮廓的节点坐标,利用最小二乘法拟合得到圆弧曲线(见图 2 虚线所示)以及对应的圆弧半径和圆心位置。再将不同方位角下得到的轮廓上各个点到对应圆心位置的距离与拟合半径相比较,验证不同方位角下外观轮廓的圆弧假设。结果表明,通过该方法所得仿真轮廓坐标位置与圆弧假设所得理论位置的相对误差均小于 0.5%,验证在凹液滴与凸液滴情况下不同方位角剖面轮廓近似看作圆弧的假设是准确的。

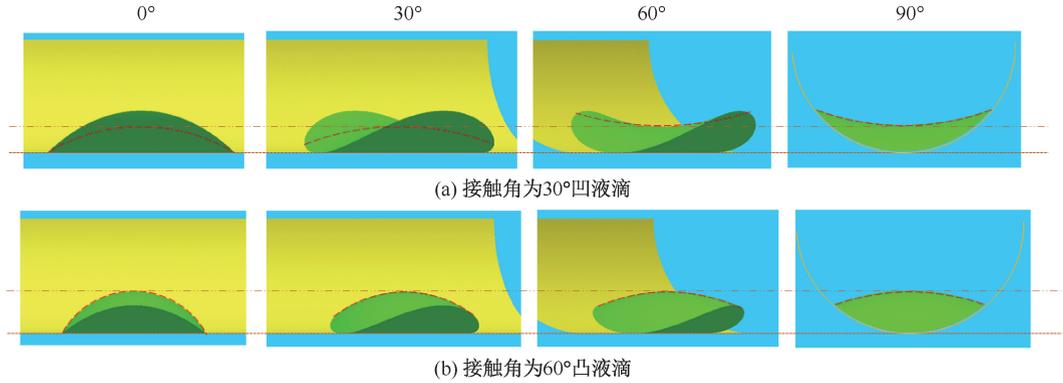


图2 液滴整体外观轮廓随不同方位角变化模拟图

Fig.2 Simulation diagram for overall appearance of the droplet with different azimuth angles (a) Convex droplets with 30° contact angle, (b) Concave droplets with 60° contact angle

3.2 液滴轮廓特征参数

描述管内液滴形貌特征,无需对形貌上的每一点进行研究。液滴在方位角为 $\pi/2$ 和 0 时圆弧半径 $R_{\pi/2}$ 和 R_0 以及液滴中心点高度 h 是理论模型描述液滴轮廓的 3 个重要参数,由此便能通过理论模型得到液滴的最大长度、宽度、高度和表面积、黏附面积、横截面积等形貌特征。液滴附着于圆柱内壁,利用管径 l 将 3 个参数无量纲化为 $R_{\pi/2}/l$ 、 R_0/l 、 h/l ,可更加方便地描述不同管径圆柱下的情况。为了验证理论预测模型的准确性,将理论模型计算的预测结果与 SE 软件模拟的结果进行对比。相对误差的计算公式为:

$$\delta = \frac{\text{理论值} - \text{模拟值}}{\text{模拟值}} \times 100\% \quad (12)$$

以液滴体积 $V = 10 \mu\text{L}$ 、黏附于半径 $l = 3.4 \text{ mm}$ 的圆柱管内为例,液滴外观轮廓参数随液滴 Young 接触角($20^\circ \sim 120^\circ$)变化的理论值和模拟值对比曲线如图3所示。由不同 Young 接触角下的相对误差比较可知,当接触角在 $20^\circ \sim 120^\circ$ 时,轮廓参数 R_0 、 h 的误差均保持在 10% 以内;而接触角在 $40^\circ \sim 50^\circ$ 之间时,液滴会有一个从凹液面到凸液面的转变,此过程对应于 $R_{\pi/2}$ 由 1 个绝对值较大的负值变为 1 个绝对值较大的正值。因此,在凹凸发生转变的临界值附近时,液面在方位角 $\theta = \pi/2$ 处轮廓的曲率半径会迅速增大,曲率则趋近于 0。此时液滴的理论形貌与模拟形貌依旧吻合,只是形貌参数 $R_{\pi/2}$ 所显示出的相对误差会变大。图3 理论模型与 SE 模拟对比结果表明,理论模型能准确给出描述轮廓

的 3 个重要参数,从而准确描述液滴的整体形貌。

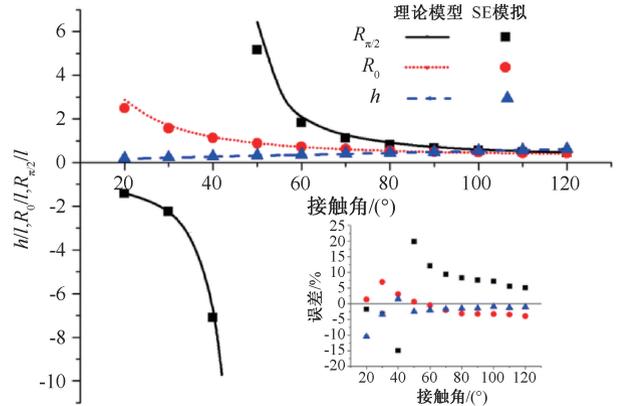


图3 液滴外观轮廓无量纲化参数随 Young 接触角变化的理论值、模拟值、误差

Fig.3 Variation for theoretical value, simulation value and error of droplet appearance contour dimensionless parameters with Young contact angle

3.3 黏附面积与阻塞比

脂肪栓塞常发生时,脂滴的直径通常为 $2 \sim 200 \mu\text{m}$,患者体内的静脉、小静脉、毛细血管通常都会有脂滴的出现^[5]。姜树山等^[21]观测到血管内壁黏附的多个脂滴形貌,本文由此推测脂滴在血管内壁的接触角为 $30^\circ \sim 70^\circ$ 。为了模拟不同管径血管中不同体积脂滴的黏附状态,将圆柱管半径 l^3 作为单位体积对脂滴体积进行无量纲化,将无量纲体积 $V_0 = V/l^3$ 作为表示血管内脂滴相对于血管大小的参数。例如:当脂滴体积为 $1.25 \times 10^{-6} \mu\text{L}$,小静脉半径为 $15, 17, 20 \mu\text{m}$ 时,则对应的无量纲体积 V_0 分别为 $0.370, 0.254, 0.156$;当脂滴体积 $1.25 \times 10^{-9} \mu\text{L}$,

毛细血管半径为 2.5、4.0 μm 时,对应的无量纲体积 V_0 分别为 0.080、0.020。血管内壁脂滴与血管黏附部分的面积 S_b 影响着脂滴的黏附力,根据建立的理论模型, S_b 可以进行曲面积分计算得到:

$$S_b = \iint_{\Sigma_b} (-\sqrt{l^2 - (r\sin\theta)^2} - h + l) ds \quad (13)$$

式中: $\theta \in [0, 2\pi]$; $r \in [0, r_t]$, r_t 可以由方程(7)得到; Σ_b 表示脂滴与血管黏附部分的曲面。用圆柱管的截面面积 πl^2 作为单位面积进行无量纲化,无量纲化后的脂滴黏附面积 $S_{b_0} = \frac{S_b}{\pi l^2}$ 。图 4 对比不同

无量纲体积下脂滴在不同接触角下理论计算值与模拟值无量纲化的黏附面积 S_{b_0} 。结果表明,理论模型结果与模拟结果误差都保持在 10% 以内。 V_0 越大,对应的 S_{b_0} 也越大;随着接触角增大,相同 V_0 下的 S_{b_0} 均呈现减小的趋势。

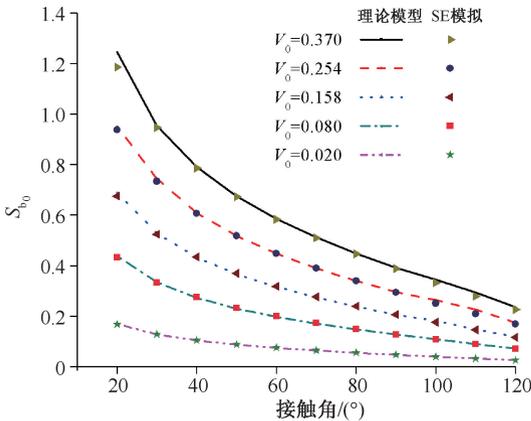


图 4 不同无量纲体积 V_0 脂滴无量纲黏附面积 S_{b_0} 理论值与模拟值随 Young 接触角变化曲线

Fig.4 Variation for theoretical and simulated dimensionless adhesion area of lipid droplets S_{b_0} at different dimensionless volume V_0 with Young contact angle

黏附在血管内壁脂滴沿血管径向的截面面积 S_c 与血管横截面积 πl^2 比值 $\kappa = \frac{S_c}{\pi l^2}$, 定义为阻塞比,可描述栓塞程度。依据理论模型, S_c 是方位角为 $\pi/2$ 时的截面面积,故可以令方程(9)中的被积函数 $\theta = \pi/2$, 对 r 进行积分,得到截面面积 S_c 的公式:

$$S_c = 2 \int_0^{r_t} \left(\frac{R_{\pi/2}}{\sqrt{R_{\pi/2}^2 - r^2}} \sqrt{R_{\pi/2}^2 - r^2} - R_{\pi/2} + \right.$$

$$\left. \sqrt{l^2 - r^2} + h - l \right) dr \quad (14)$$

图 5 对比不同无量纲体积下不同接触角的理论模型与 SE 模拟的 κ , 两者相对误差同样保持在 10% 以内。结果表明,黏附在血管内壁的脂滴接触角越小,相同 V_0 下, κ 越小;而在相同接触角条件下, V_0 越大, κ 越大。无论是 κ 还是 S_{b_0} , 都随着脂滴 V_0 的增大而增大。

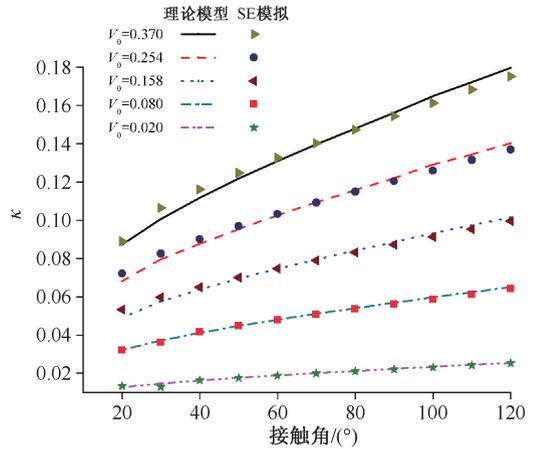


图 5 不同无量纲体积 V_0 脂滴阻塞比 κ 理论值与模拟值随 Young 接触角变化

Fig.5 Variation for theoretical and simulated dimensionless blockage ratio κ at different dimensionless volume V_0 with Young contact angle

4 讨论

液滴在管内的理论模型能够根据液滴在方位角为 $\pi/2$ 和 0 时圆弧半径 $R_{\pi/2}$ 、 R_0 以及液滴中心点高度 h 这 3 个轮廓参数得到液滴的形貌特征。3 个轮廓参数的理论模型结果与相同条件下 SE 模拟结果误差均在 10% 以内,表明理论模型能准确给出描述轮廓的 3 个重要参数,故理论模型能够准确描述液滴在管内壁的整体形貌。

由三相接触状态下的液滴滑动无量纲准则可知,液滴在壁面接触角不变时,体积越大,黏附面积越大,三相接触线的长度越长,故阻碍液滴滑动的表面张力越大,它对壁面的黏附力也越强。根据 Stokes 公式可以得到均匀流场中风速对壁面黏附液滴的拖拽力^[22]:

$$F = \frac{1}{2} \rho g U^2 \frac{24}{Re} S_c \quad (15)$$

式中： U 为血流流速； ρ 为血流密度； Re 为雷诺数； g 为重力加速度； S_c 为脂滴截面面积。在“脂滴-血浆-血管内壁”的三相接触模型中，血管环境中的参数能与式(15)中的参数对应。而在其他参数不变，阻塞比 κ 较大时，对应的脂滴截面面积 S_c 也会更大，脂滴会受到血流带来的更大的剪切力。综合图4、5结果来看，在同样的无量纲体积下，脂滴的接触角越大，无量纲黏附面积越小， κ 越大。因此，在血管内壁接触角较大的脂滴更不易黏附堆积在血管壁上。脂肪栓塞患者血管中会有较多数量的游离脂滴，其中会有许多脂滴随着血液流动黏附在血管内壁。如果通过改变“脂滴-血浆-血管壁”这三相的接触状态，增大血液内脂滴在血管壁上的接触角，便能减少血管内壁上的脂滴黏附数量，减小形成栓子堵塞血管的概率。而对于血管内壁黏附的脂滴接触角和体积参数导致栓塞的量化结果，还需要进行后续的临床观察和实验探究。

液滴在圆柱管内壁黏附的形貌是1个非轴对称的曲面，通过拉普拉斯方程难以求出其解析解。本文建立1个变半径理论模型描述液滴在圆柱管内壁的形貌，并通过SE仿真软件进行仿真验证，在所研究范围内得到的模型参数 R_0 、 $R_{\pi/2}$ 、 h 理论值与仿真结果的相对误差均小于10%，表明理论模型所得到的形貌特征参数与实际形貌参数相吻合。利用所建液滴在圆柱管内壁黏附形貌的理论模型，可以更快得到血管内脂滴在血管内壁上的黏附形貌参数与影响规律。由具有相同 V_0 的脂滴在血管内 S_{b_0} 和 κ 随着接触角的变化规律可以看出， S_{b_0} 随着接触角的增加而减小， κ 随着接触角的增加而增大。相同 V_0 脂滴在血管内壁的接触角较大时，在血管内壁上受到较小黏附力的同时又会受到血流较大的剪切力，脂滴在血管内壁更不易黏附，减小了血管堵塞的概率。在接触角相同的情况下， V_0 越小，脂滴 S_{b_0} 和 κ 越小。脂滴在体积小时难以造成血管的堵塞，故防止脂肪堆积体积变大也可减小栓塞概率。

5 结论

本文提出了一种能够描述血管内壁脂滴形貌的理论模型，相比于数值模拟能够更快得出脂滴在血管内壁黏附时的形貌与规律。该理论模

型适用于血细胞浓度较低、脂滴与血液中悬浊物不发生相互作用的情况。对于复杂环境下的脂滴形貌研究，依然需要借用有限元软件进行仿真模拟，才能得到更为符合实际情况的结果。利用理论模型预测脂肪栓塞患者的体内血管壁的脂滴形貌，对脂肪栓塞等疾病的治疗与预防具有重要意义。

参考文献：

- [1] 姜宗来. 心血管生物力学研究的新进展[J]. 医用生物力学, 2010, 25(5): 313-315.
JIANG ZL. Recent advances in cardiovascular biomechanics [J]. J Med Biomech, 2010, 25(5): 313-315.
- [2] GURD AR, WILSON RI. The fat embolism syndrome [J]. Lancet, 1972, 300(7770): 231-232.
- [3] 唐春香. 脂肪栓塞综合征及其影像学表现[J]. 临床放射学杂志, 2013, 32(8): 1206-1208
- [4] 滕青山, 张伯勋. 脂肪栓塞综合征早期诊断方法[J]. 中华创伤杂志, 1996, 12(2): 119-121.
- [5] 盛韶山, 潘志军. 脂肪栓塞综合征发病机制新认识(文献综述)[J]. 国外医学:外科学分册, 2003, 30(5): 268-271.
- [6] 许孝华, 陈凯, 徐权伟. 单微颗粒在血管内运动状态的力学分析[J]. 医用生物力学, 2016, 31(2): 117-123.
XU XH, CHEN K, XU QW. Mechanical analysis of the single microparticle motion in blood vessel [J]. J Med Biomech, 2016, 31(2): 117-123.
- [7] 蒋晗洁, 许泽, 刘玉岚. 血管收缩压作用下冠脉支架解析解推导与有限元分析[J]. 医用生物力学, 2020, 35(2): 171-177.
JIANG HJ, XU Z, LIU YL. Analytical solution and finite element analysis of coronary stent under vascular systolic pressure [J]. J Med Biomech, 2020, 35(2): 171-177.
- [8] 杨帅星, 张明, 戴向晨, 等. 支架作用下主动脉血管壁应力分析[J]. 医用生物力学, 2021, 36(1): 14-21
YANG SX, ZHANG M, DAI XC, et al. Stress analysis of aortic vessels under stent graft [J]. J Med Biomech, 2021, 36(1): 14-21
- [9] 冯元桢. 生物力学: 活组织的力学特性[M]. 长沙: 湖南科技出版社, 1986: 82-120.
- [10] YOUNG T. An essay on the cohesion of fluids [J]. Philos Trans R Soc Lon, 1805, 95(1): 65-87.
- [11] SCOTT CF, SANDER GC, NORBURY J. Computation of capillary surfaces for the Laplace-Young equation [J]. Q J Mech Appl Math, 2004, 24(2): 201-212.
- [12] CHEN S, LI D, SHEN S, et al. Theoretical model of static semi-ellipsoidal droplet on a horizontal surface [J]. IOP Conf Ser Mater Sci Eng, 2015, 88(1): 12-19.

- [13] LUBARDA VA, TALKE KA. Analysis of the equilibrium droplet shape based on an ellipsoidal droplet model [J]. *Langmuir*, 2011, 27(17): 10705-10713.
- [14] WANG XW, YU Y. Analysis of the shape of heavy droplets on flat and spherical surface [J]. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2012, 55(6): 1118-1124.
- [15] LU Z, NG TW, YU Y. Fast modeling of clam-shell drop morphologies on cylindrical surfaces [J]. *Int J Heat Mass Transf*, 2016, 93(1): 1132-1136.
- [16] WAGNER HD, WIESEL E, GALLIS HE. Spreading of liquid droplets on cylindrical surfaces: Accurate determination of contact angle [J]. *Mat Res Soc Symp Proc*, 1990, 170(3): 1352-1355.
- [17] CARMO MPD. *Differential geometry of curves and surfaces* [M]. USA: Prentice-Hall, 1976: 217-309.
- [18] BRAKKE KA. The surface evolver [J]. *Exp Math*, 1992, 1(2): 141-165.
- [19] CRAWFORD S, LIM SK, GRADECAK S. Fundamental insights into nanowire diameter modulation and the liquid/solid interface [J]. *Nano Lett*, 2013, 13(1): 226-232.
- [20] LIANG YE, MAHARSIH IK, SHENG YJ, *et al.* Capillary interactions between droplets and ideal roughness: Attractive protrusion and repulsive trench [J]. *Exp Therm Fluid Sci*, 2019, 105(1): 216-222.
- [21] 姜树山, 王英元. 大鼠实验性肺脂肪栓塞的病理学研究[J]. *中国法医学杂志*, 1990, 5(3): 147-149.
- [22] 谢剑, 刘琪, 何孝天, 等. 气体剪切下液滴临界滑动无量纲准则[J]. *工程热物理学报*, 2017, 38(5): 1033-1038.